



CONCOURS D'ACCES EN 1ère ANNEE POUR LES TITULAIRES DU DEUG EN SCIENCES OU EQUIVALENT

EDITION 2015

EHTP

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Durée 3h

Lundi 13 Juillet 2015

Exercice

1. Questions préliminaires

   (a) Soient E un espace vectoriel réel de dimension n, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E et u un endomorphisme de E. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme. Soit λ une valeur propre de u et x un vecteur propre associé à λ. Démontrer que x est vecteur propre de l'endomorphisme $P(u)$ pour la valeur propre $P(\lambda)$.

   (b) Enoncer le théorème de Hamilton-Cayley.

2. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -9 & 1 & 9 \\ 9 & 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

   (a) Calculer le determinant et la trace de A.

   (b) Déterminer les deux valeurs propres λ_1 et λ_2 ($\lambda_1 > \lambda_2$) de A et leur multiplicité.

   (c) Déterminer le vecteur propre u_3, associé à λ_2, dont la deuxième coordonnée dans $\mathcal{B}$ est égale à 1.

   (d) Vérifier que $u_1 = e_1 + e_2 + e_3$ et $u_2 = e_1 + e_3$ sont des vecteurs propres pour la valeur propre λ_1.

   (e) Justifier que $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de E.

   (f) Déterminer la matrice de passage $\mathbb{P}$ de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ et calculer $\mathbb{P}^{-1}$.

   (g) Diagonaliser A.

   (h) On cherche à déterminer une matrice B telle que $B^3 = A$.

      i. Démontrer que si λ est une valeur propre de B alors λ^3 est une valeur propre de A.

      ii. Déterminer les valeurs propres de B et leur multiplicité.

      iii. Ecrire le polynôme caractéristique de B.

      iv. Déterminer B telle que $B^3 = A$.

Problème

Partie I

Dans cette première partie on étudie des fonctions $f : [a,b] \longrightarrow I\!R$ suceptibles de vérifier une ou plusieurs des conditions suivantes :

(1) f est dérivable dans $[a,b]$.

(2) f est deux fois dérivable dans $[a,b]$.

(3) $f(a) = f(b) = 0$.

(4) Sous l'hypothèse (2), on a de plus $f''(x) \leq 0$ pour tout $x \in [a,b]$

1. Sous les hypothèses (1) et (3) montrer que, s'il existe $x_0 \in]a,b[$ tel que $f(x_0) < 0$, il existe alors $c \in]a, x_0[$ et $d \in]x_0, b[$ tels que $f'(c) < f'(d)$.

   (On pourra utiliser le théorème des accroissements finis dans les intervalles $[a, x_0]$ et $[x_0, b]$)

2. Sous les hypothèses (2), (3) et (4), que peut-on dire de la fonction f' ? En déduire en utilisant la question 1., que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a,b]$.

3. Plus généralement, si f satisfait seulement aux hypothèses (2) et (4), montrer que, quel que soit $x \in [a,b]$, on a

$$f(x) \geq f(a) + (x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

   (On appliquera 2. à la fonction $g(x) = f(x) - f(a) - (x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$)

4. Supposons que f satisfasse uniquement à (2) et qu'il existe un réel k qui minore la dérivée seconde de f sur $[a,b]$. En utilisant la question 3. (de la partie I), montrer que

$$f(x) \leq f(a) + (x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a} - k\frac{(b-x)(x-a)}{2}.$$

   (On pourra utiliser la fonction auxiliaire $h(x) = -f(x) - k\frac{(b-x)(x-a)}{2}$)

5. Déduire des deux questions précédentes que s'il existe un réel $k \leq 0$ tel que, pou

tout $x \in [a, b]$, on ait $k \leq f''(x) \leq 0$, alors

$$(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} \leq \int_a^b f(t)dt \leq (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} - k\frac{(b-a)^3}{12}.$$

Partie II

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

- $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} \ln(t)dt$
- $v_n = \displaystyle\int_n^{n+1} (\ln(n) + (t-n)[\ln(n+1) - \ln(n)])\, dt$
- $w_n = u_n - v_n$

1. Calculer u_n, v_n et w_n.
2. Calculer $S'_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$, $S''_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} w_k$
3. On se propose de démontrer la convergence de la suite $(S_n)_{n\geq 1}$
   (a) Montrer, à l'aide de la question 5. de la partie I, que
   $$0 \leq w_n \leq \frac{1}{12n^2}.$$
   (b) Prouver la double inégalité
   $$\frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq \int_1^n \frac{dt}{t^2} \leq \frac{1}{1^2} + \cdots + \frac{1}{(n-1)^2}$$
   puis l'inégalité
   $$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2.$$
   (c) En déduire la convergence de la suite $(S_n)_{n\geq 1}$.
   On désigne par l la limite de la suite $(S_n)_{n\geq 1}$.
   (d) Vérifier que $l \leq \dfrac{1}{6}$.
4. Montrer que $\dfrac{n!e^n\sqrt{n}}{n^{n+1}}$ tend vers une limite finie (notée α) quand n tend vers l'infini.
5. Calculer α en fonction de l.